

# Correction de l'interrogation n° 1

## Exercice 1

1. La suite de variables aléatoires  $\left(\frac{X_2}{n}\right)$  converge presque sûrement vers 0 et  $(X_1)$  converge bien sûr presque sûrement vers  $X_1$  donc  $X_1 + \frac{X_2}{n}$  converge presque sûrement vers  $X_1$ . *En particulier, puisque la convergence presque sûre implique la convergence en loi,  $X_1 + \frac{X_2}{n}$  converge en loi vers  $X_1$ .*

2. Soit  $n \geq 1$ . Notons  $\nu$  la loi uniforme sur  $[0, 1]$ . Comme  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes et de loi  $\nu$ , la loi de  $(X_1, X_2)$  est  $\nu \otimes \nu$ . Comme  $X_n$  et  $X_{n+1}$  sont indépendantes et de loi  $\nu$ , la loi de  $(X_n, X_{n+1})$  est  $\nu \otimes \nu$ , elle aussi. *En particulier,  $(X_1, X_2)$  et  $(X_n, X_{n+1})$  ont même loi.*

3. Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue bornée. Il s'agit de montrer que  $\mathbf{E}\left[f\left(X_n + \frac{X_{n+1}}{n}\right)\right]$  converge vers  $\mathbf{E}[f(X_1)]$ . Pour tout  $n \geq 1$ , ayant vu en question 2 que  $(X_n, X_{n+1})$  et  $(X_1, X_2)$  ont même loi, on a

$$\mathbf{E}\left[f\left(X_n + \frac{X_{n+1}}{n}\right)\right] = \mathbf{E}\left[f\left(X_1 + \frac{X_2}{n}\right)\right].$$

Il suffit donc de montrer que  $\mathbf{E}\left[f\left(X_1 + \frac{X_2}{n}\right)\right]$  converge vers  $\mathbf{E}[f(X_1)]$ , ce qui est bien le cas puisque la question 1 garantit la convergence en loi de  $X_1 + \frac{X_2}{n}$  vers  $X_1$ . *D'où le résultat souhaité.*

## Exercice 2

1. Cela est dû à la linéarité de l'espérance conditionnelle. Il s'agit pour cela de vérifier que les variables aléatoires  $XZ \mathbf{1}_{\{Z \geq 0\}}$  et  $\sin(XY)$  sont intégrables. La première est intégrable en tant que produit de variables aléatoires intégrables *indépendantes* ( $Z \mathbf{1}_{\{Z \geq 0\}}$  est bien intégrable car  $|Z \mathbf{1}_{\{Z \geq 0\}}| \leq |Z|$  et  $Z$  est intégrable). La seconde est intégrable car la fonction sinus est bornée.

2. Comme  $X$  est  $\sigma(X, Y)$ -mesurable et puisque  $Z \mathbf{1}_{\{Z \geq 0\}}$  est  $\sigma(Z)$ -mesurable donc indépendante de  $\sigma(X, Y)$ , on a  $\mathbf{E}[XZ \mathbf{1}_{\{Z \geq 0\}} | X, Y] = X \mathbf{E}[Z \mathbf{1}_{\{Z \geq 0\}}]$ . Ayant  $\mathbf{E}[Z \mathbf{1}_{\{Z \geq 0\}}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-x^2/2}\right]_{x=0}^\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ , on obtient

$$\mathbf{E}[XZ \mathbf{1}_{\{Z \geq 0\}} | X, Y] = \frac{X}{\sqrt{2\pi}}.$$

Comme  $\sin(XY)$  est  $\sigma(X, Y)$ -mesurable, on a  $\mathbf{E}[\sin(XY) | X, Y] = \sin(XY)$ . *Par conséquent,  $\mathbf{E}[U | X, Y]$  vaut  $\frac{X}{\sqrt{2\pi}} + \sin(XY)$ .*

3. Comme  $X$  est  $\sigma(X)$ -mesurable donc indépendante de  $Z$  et puisque  $Z \mathbf{1}_{\{Z \geq 0\}}$  est  $\sigma(Z)$ -mesurable, on a  $\mathbf{E}[XZ \mathbf{1}_{\{Z \geq 0\}} | Z] = Z \mathbf{1}_{\{Z \geq 0\}} \mathbf{E}[X]$ , qui vaut 0 puisque  $\mathbf{E}[X] = 0$ . Comme  $(X, Y)$  est indépendante de  $Z$ , on a  $\mathbf{E}[\sin(XY) | Z] = \mathbf{E}[\sin(XY)]$ ,

qui vaut  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(xy) e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy$  par indépendance de  $X$  et  $Y$ . Un changement de variable  $y' = -y$  et l'imparité du sinus révèlent que cette intégrale double est égale à son opposé, donc nulle. Ainsi,  $\mathbf{E}[U | Z]$  vaut presque sûrement 0.

4. Le même argument qu'en question 2 donne  $\mathbf{E}[XZ \mathbf{1}_{\{Z \geq 0\}} | X] = \frac{X}{\sqrt{2\pi}}$ . Comme  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, si on pose  $F : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(xy) e^{-y^2/2} dy$ , alors  $\mathbf{E}[\sin(XY) | X]$  vaut  $F(X)$  presque sûrement. Un changement de variable  $y' = -y$  révèle que  $F$  est la fonction nulle. Donc  $\mathbf{E}[U | X]$  vaut  $\frac{X}{\sqrt{2\pi}}$  presque sûrement.

### Exercice 3

1. On veut appliquer la loi du 0-1 de Kolmogoroff. Comme les variables aléatoires  $Y_n$  sont indépendantes, il suffit de montrer que l'événement  $\{S = \infty\}$  appartient à la tribu asymptotique.

Soit  $n_0 \geq 1$ . Il s'agit de montrer que  $\{S = \infty\}$  appartient à la tribu  $\mathcal{G}_{n_0} := \sigma(Y_{n_0}, Y_{n_0+1}, \dots)$ . On observe pour cela que  $\{S = \infty\} = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \bigcup_{k \geq n_0} \{Y_k \geq n\}$ . On peut dans cette écriture prendre  $k$  plus grand que  $n_0$  pour la raison suivante. Si on pose  $S_{<n_0} = \sup\{Y_k; k < n_0\}$  et  $S_{\geq n_0} = \sup\{Y_k; k \geq n_0\}$ , on a  $S = \max(S_{<n_0}, S_{\geq n_0})$ . Or  $S_{<n_0}$  est toujours fini comme sup d'un ensemble fini donc la condition «  $S = \infty$  » équivaut à «  $S_{\geq n_0} = \infty$  ». On conclut en remarquant tout d'abord que, dans l'écriture  $\{S = \infty\} = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \bigcup_{k \geq n_0} \{Y_k \geq n\}$ , chaque  $\{Y_k \geq n\}$  appartient à  $\mathcal{G}_{n_0}$ , puis que la tribu  $\mathcal{G}_{n_0}$  est stable par union dénombrable et par intersection dénombrable.

2. Les deux conditions sont compatibles. Il suffit de prendre  $(Y_n)$  une suite de variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout  $n \geq 1$ , on ait  $\mathbf{P}(Y_n = n) = \frac{1}{n}$  et  $\mathbf{P}(Y_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ . Puisque la série harmonique diverge et comme les variables aléatoires  $Y_n$  sont indépendantes, le lemme de Borel-Cantelli indépendant appliqué aux événements  $\{Y_n = n\}$  garantit que presque sûrement, il y a une infinité de valeurs de  $n$  pour lesquelles  $Y_n$  est égal à  $n$ . En particulier, on a presque sûrement  $S = \infty$ . Pourtant,  $\mathbf{P}(Y_n \neq 0)$  converge vers 0, ce qui garantit que  $Y_n$  converge en probabilité vers 0.

### Commentaires additionnels

1 (1) Plus précisément, l'égalité  $\mathbf{E} \left[ f \left( X_n + \frac{X_{n+1}}{n} \right) \right] = \mathbf{E} \left[ f \left( X_1 + \frac{X_2}{n} \right) \right]$  se voit comme suit. Par théorème de transfert appliqué à  $(x, y) \mapsto f \left( x + \frac{y}{n} \right)$  et à la variable aléatoire  $(X_n, X_{n+1})$ , l'espérance de gauche vaut  $\int_{[0,1]^2} f(x, y) d\mu(x, y)$ , où  $\mu$  désigne la loi de  $(X_n, X_{n+1})$  — qui est aussi la loi de  $(X_1, X_2)$ . Le même argument appliqué à la même fonction mais à la variable aléatoire  $(X_1, X_2)$  révèle que l'espérance de droite est égale à cette même intégrale. En particulier, les deux espérances sont égales.

2 (2) La variable aléatoire  $\sin(XY)$  est bien  $\sigma(X, Y)$ -mesurable. En effet,  $X$  et  $Y$  sont  $\sigma(X, Y)$ -mesurables donc  $XY$  l'est également. Comme la fonction sinus est continue donc mesurable,  $\sin(XY)$  est elle aussi  $\sigma(X, Y)$ -mesurable — cela s'obtient par composition dans le diagramme  $(\Omega, \sigma(X, Y)) \xrightarrow{XY} (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R})) \xrightarrow{\sin} (\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ .

3 (2) Pour penser à cette construction, il s'agissait de revisiter la gymnastique pratiquée dans l'exercice 0.10 — voir notamment sa question 4.